NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que la matriz asociada respecto a las bases $B_1=\{(1,2),(-1,2)\}$ y $B_2=\{(1,1),(-1,1)\}$ es $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

   a) **[7 pt]** Encuentre explícitamente $T(x,y)$.
   Solución:

   Se tiene que

$$T(1,2)=0(1,1)+4(-1,1)=(-4,4)$$
$$T(-1,2)=-1(1,1)-1(-1,1)=(0,-2)$$

3 puntos

Luego como $\mathcal{B}_1$ es un base

$$(x,y)=\left(\frac{2x+y}{4}\right)(1,2)+\left(\frac{y-2x}{4}\right)(-1,2)$$
$$T(x,y)=\left(\frac{2x+y}{4}\right)T(1,2)+\left(\frac{y-2x}{4}\right)T(-1,2)$$
$$T(x,y)=\left(-2x-y,3x+\frac{y}{2}\right)$$

4 puntos

   b) **[7 pt]** ¿Es T un isomorfismo?. Justifique.
   Solución:

   Como $Im(T)=<(-4,4),(0,2)>$ y además son L.I. entonces T es sobreyectiva y por el teorema de la dimension se tiene que es inyectiva, asi T es un isomorfismo.

7 puntos

   c) **[6 pt]** Encuentre explícitamente $T^{-1}(x,y)$.
   Solución:

   Buscamos $T^{-1}(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow T(a,b)=(x,y)$ Por lo que tenemos que resolver el sistema

$$\begin{array}{r}-2a-b=x\\ 3a+\frac{b}{2}=y\end{array}$$

3 puntos

Así

$$T^{-1}(x,y)=\left(\frac{x+2y}{4},\frac{-6x-4y}{4}\right)$$

3 puntos

2) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que :

$$T(A) = 2A \qquad T(B) = B \qquad T(C) = -C \qquad T(D) = 0_{2\times 2}$$

a) **[5 pt]** Mostrar que T no es inyectiva.
Solución:

Como $D \in Ker(T)$, entonces $Ker(T) \neq \{0_{2\times 2}\} \Rightarrow T$ No es inyectiva.

5 puntos

b) **[5 pt]** Mostrar un conjunto que genera $Im(T)$.
Solución:

Tenemos que $Im(T) =< T(A), T(B), T(C), T(D) >$ ya que $\{A, B, C, D\}$ es una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, así un conjunto generador para $Im(T)$ es: $\{2A, B, -C\}$

5 puntos

c) **[5 pt]** Si $X = 4A + 5B - 2C + 9D$. Determinar $T(X)$.
Solución:

$$T(X) = 4T(A) + 5T(B) - 2T(C) + 9T(D) = 8A + 5B + 2C$$

5 puntos

d) **[5 pt]** Calcule $[T]_{B_1}^{B_1}$ donde B_1 es la base formada por $B_1 = \{A, B, C, D\}$
Solución:

Tenemos que:
$T(A) = 2A + 0B + 0C + 0D$
$T(B) = 0A + B + 0C + 0D$
$T(C) = 0A + 0B - C + 0D$
$T(D) = 0A + 0B + 0C + 0D$

3 puntos

Así

$$[T]_{\mathcal{B}_\infty}^{\mathcal{B}_\in} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 puntos

3) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) **[5 pt]** ¿Existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $(0, -4, a)$ sea vector propio de A?.
Solución:

Se debe cumplir que $Av = \lambda v$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene que $a = 2$

5 puntos

b) **[15 pt]** Muestre que A es diagonalizable y encontrar P y D tal que $D = P^{-1}AP$ (no calcular la inversa de P).
Solución:

- $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$
- Valores propios $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

5 puntos

- Para $\lambda_1 = 1$ se tiene que $E_{\lambda_1} =< (1,0,0), (0,-2,1) >$
  Para λ_2 se tiene que $E_{\lambda_2} =< (1,0,1) >$

5 puntos

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5 puntos